

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

تعريف

لكن لم يبرأ منه الحلة التولية والاصية R
 نرى لجهة كل القبيات المستقمة المعرفة بـ A بالشكل $Der(A)$ والتولية
 حالة

مبرهنة

لنكن A حراً فوق الحقة R ، ان ثمة كل القبيات المستقمة المعرفة بـ $Der(A)$ المعرفة بـ A
 تعد مودلاً خطية الحقة R

البرهان

نكون قمية صـ (+) بالعدد

$$+ : Der(A) \times Der(A) \rightarrow Der(A)$$

$$(f, g) \mapsto f + g$$

لنثبت بالبرهان ان جميع القبيات المستقمة المعرفة بـ A مستقمة

اولاً : لنكن $f, g \in Der A$ نعرف $f+g$ بالعدد التالي

$$\forall a \in A : (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

لنكن $a, b \in A$ ونحسب

$$f(a) = f(b) \quad \text{حيث } f \text{ قمية في } A$$

$$g(a) = g(b) \quad \text{حيث } g \text{ قمية في } A$$

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f(b) + g(b) = (f+g)(b)$$

نرى ان القبيات المستقمة

$$\forall a, b \in A \quad \lambda \in R :$$

$$(f+g)(a+b) \stackrel{?}{=} (f+g)(a) + (f+g)(b)$$

$$\begin{aligned} (f+g)(a+b) &= f(a+b) + g(a+b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b) \\ &= f(a) + g(a) + f(b) + g(b) \\ &= (f+g)(a) + (f+g)(b) \end{aligned}$$

$$(2) (f+g)(\lambda a) \stackrel{?}{=} \lambda (f+g)(a)$$

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda a) &= f(\lambda a) + g(\lambda a) = \lambda f(a) + \lambda g(a) \\ &= \lambda [f(a) + g(a)] \\ &= \lambda (f+g)(a) \end{aligned}$$

$$(3) (f+g)(a \cdot b) \stackrel{?}{=} b(f+g)(a) + a(f+g)(b)$$

$$\begin{aligned} (f+g)(a \cdot b) &= f(a \cdot b) + g(a \cdot b) \rightarrow \text{نطبق تعريف } f \text{ و } g \\ &= [f(a)b + a f(b)] + [g(a)b + a g(b)] \\ &= [f(a)b + g(a)b] + [a f(b) + a g(b)] \\ &= b[f(a) + g(a)] + a[f(b) + g(b)] \\ &= b(f+g)(a) + a(f+g)(b) \end{aligned}$$

منه

$$f+g \in \text{Der}(A)$$

نلاحظ ان $(+)$ هي عملية

$$(f, g), (f_1, g_1) \in \text{Der}(A) \times \text{Der}(A)$$

نعتبر

$$(f, g) = (f_1, g_1)$$

$$f = f_1 \quad g = g_1 \quad \text{منه}$$

نلاحظ ان (f, g) اذا كان f و g في $\text{Der}(A)$

فمنه $a \in A$ و $f(a) = f_1(a)$ و $g(a) = g_1(a)$

$$f(a) = f_1(a), \quad g(a) = g_1(a)$$

$$f(a) + g(a) = f_1(a) + g_1(a)$$

$$(f+g)(a) = (f_1+g_1)(a)$$

$$\Rightarrow f+g = f_1+g_1$$

منه $(f+g)$ هي في $\text{Der}(A)$

نلاحظ ان (f, g) اذا كان f و g في $\text{Der}(A)$ و (f_1, g_1) في $\text{Der}(A)$ و $(f, g) = (f_1, g_1)$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

دعنا نثبت ان $Der(A)$ هي مجموعة ليبر

$$\forall f, g, h \in Der(A) \Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$$

$$\begin{aligned} \forall a \in A : [(f+g)+h](a) &= (f+g)(a) + h(a) \\ &= [f(a) + g(a)] + h(a) \\ &= f(a) + [g(a) + h(a)] \\ &= f(a) + [(g+h)(a)] \\ &= [f+(g+h)](a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f+(g+h) = (f+g)+h$$

الخاصية .

المجموعة $Der(A)$ هي مجموعة ليبر

$$0 : A \rightarrow A$$

$$\forall a \in A : 0(a) = 0 \quad \forall f \in Der(A)$$

نثبت ان

$$f+0 = f$$

$$\forall a \in A : (f+0)(a) = f(a) + 0(a) = f(a)$$

$$\Rightarrow f+0 = f$$

الخاصية . لدينا $f \in Der(A)$ ولنفرض ان

$$f : A \rightarrow A$$

$$\forall a \in A : (-f)(a) = -f(a)$$

كلية ليبر ان f و $-f$ هما ليبر ايضا . نثبت ان $f+(-f) = 0$

$$\begin{aligned} \forall a \in A : (-f+f)(a) &= (-f)(a) + f(a) = -f(a) + f(a) \\ &= 0 = 0(a) \end{aligned}$$

$$-f+f = 0$$

نثبت ان $Der(A)$ هي مجموعة ليبر

بالاعتماد على ان $Der(A)$ هي مجموعة ليبر . نثبت ان $Der(A)$ هي مجموعة ليبر